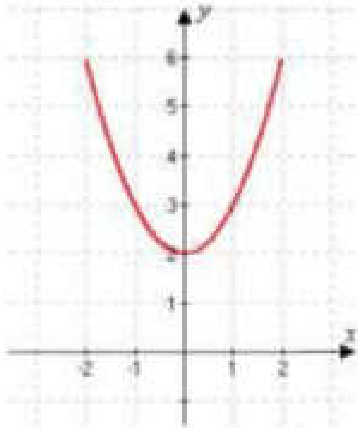
Függvények
Megoldások

1) Az ábrán egy $[-2;2]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! **(2 pont)**



a) $x \mapsto x^2 - 2$
b) $x \mapsto x^2 + 2$
c) $x \mapsto (x+2)^2$

Megoldás:

b) Az x^2 függvény képét eltoljuk az y tengely mentén két egységgel fölfelé, így az $x \mapsto x^2 + 2$ függvény képét kapjuk. (2 pont)

2) Határozza meg az 1. feladatban megadott, $[-2;2]$ intervallumon értelmezett függvény értékkészletét! **(3 pont)**

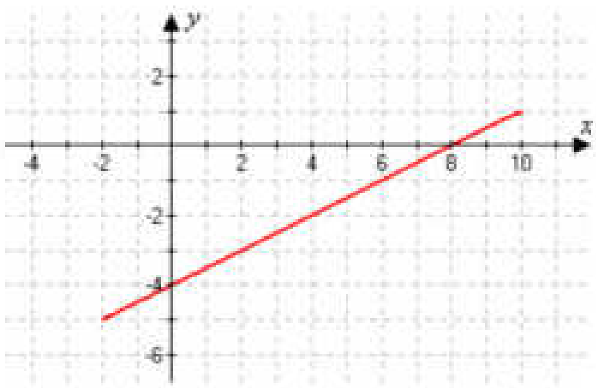
Megoldás:

Az értékkészlet a felvett függvényértékek halmaza. $2 \le f(x) \le 6$ vagy $[2;6]$

(3pont)

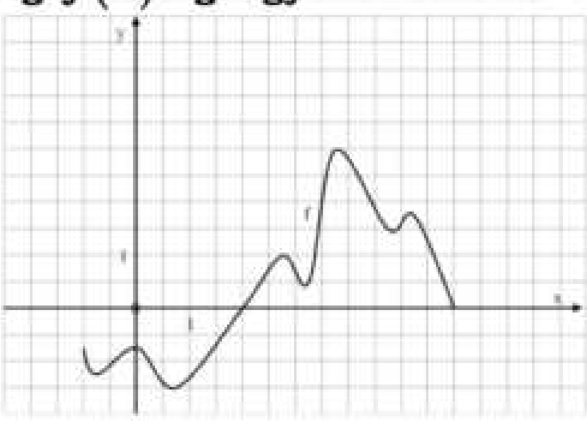
3) Ábrázolja az $f(x) = 0,5x - 4$ függvényt a $[-2;10]$ intervallumon! **(2 pont)**

Megoldás:



(2 pont)

4) A [–1;6]-on értelmezett $f(x)$ függvény hozzárendelési szabályát a grafikonjával adtuk meg. Határozza meg az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldását! Adja meg $f(x)$ legnagyobb értékét! **(3 pont)**



Megoldás:

$2 \le x \le 6$ (2 pont)

$f(x)$ legnagyobb értéke: **3** (1 pont)

Összesen: 3 pont

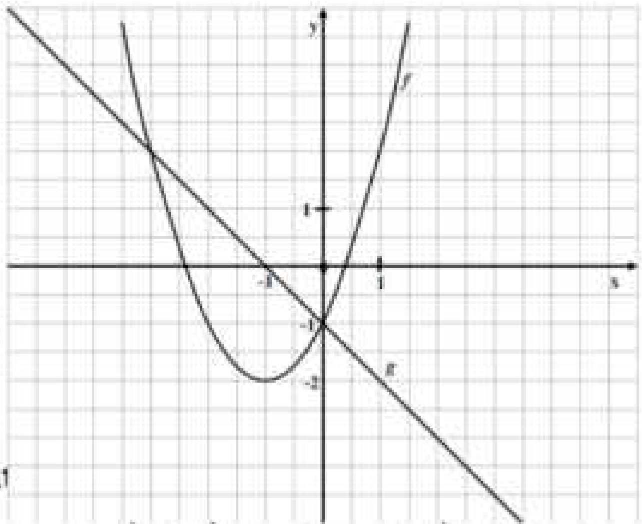
5) Az f és g függvényeket a valós számok halmazán értelmezzük a következő képletek szerint: $f(x) = (x+1)^2 - 2$; $g(x) = -x - 1$

a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az f függvényt! (Az ábrán szerepeljen a grafikonnak legalább a $-3{,}5 \le x \le 1$ intervallumhoz tartozó része.) (4 pont)

b) Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben a g függvényt! (2 pont)

c) Oldja meg az $(x+1)^2 - 2 \le -x - 1$ egyenlőtlenséget! (6 pont)

Megoldás:



a) $f(x)$ ábrázolása (4 pont)

b) Ábra (2 pont)

c) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 42.feladat*

Összesen: 12 pont

6) Az f függvényt a $[-2;6]$ intervallumon a grafikonjával értelmeztük. Mekkora f legkisebb, illetve legnagyobb értéke? Milyen x értékekhez tartoznak ezek a szélsőértékek? (4 pont)

Megoldás:

f legkisebb értéke -3. (1 pont)

Ez az $x = 2$ értékhez tartozik. (1 pont)

f legnagyobb értéke 7. (1 pont)

Ez az $x = 6$ értékhez tartozik. (1 pont)

Összesen: 4 pont

7) Adott a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 2\lg(y+1) &= \lg(x+11) \\ y &= 2x \end{aligned}\right\}$$

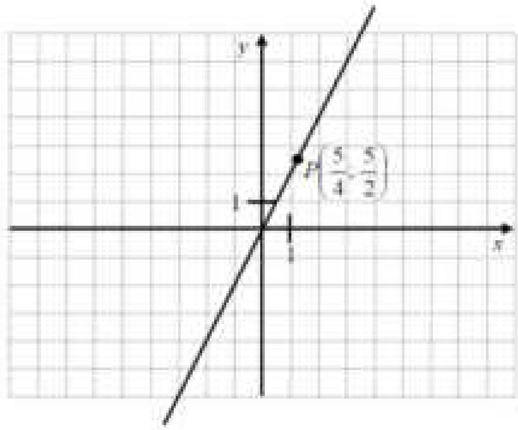
a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x;y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! (2 pont)

b) Milyen x, illetve y valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? (2 pont)

c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! (11 pont)

d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! (2 pont)

Megoldás:



a) Ábra. (2 pont)

b) *Lásd: Értelmezési tartomány, értékkészlet 11.*

c) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 4.*

d) **A $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right)$ pont bejelölése.**

8) Adja meg az $5x-3y=2$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

A metszéspont: $\left(\mathbf{0};-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$ (2 pont)

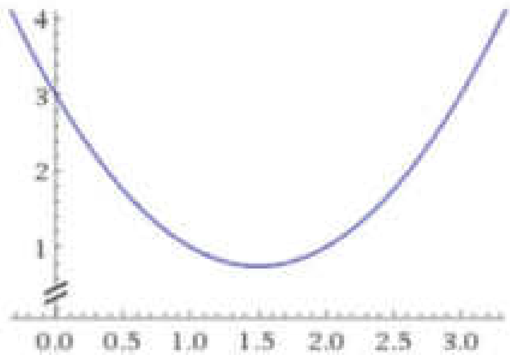
9)

a) Ábrázolja a $[-2;4]$-on értelmezett, $x \to (x-1,5)^2+0,75$ hozzárendeléssel megadott függvényt! (2 pont)

b) Állapítsa meg a fenti függvény minimumának helyét és értékét! (2 pont)

c) Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2-3x+3}=1-2x$ egyenletet! (8 pont)

Megoldás:



a) Ábrázolás (2 pont)

b) A minimum helye: $\mathbf{x=1,5}$ (1 pont)

Értéke: **0,75** (1 pont)

c) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 43. feladat*

Összesen: 12 pont

10) A valós számok halmazán értelmezett $x \to -(x-1)^2+4$ függvénynek minimuma vagy maximuma van? Adja meg a szélsőérték helyét és értékét! (3 pont)

Megoldás:

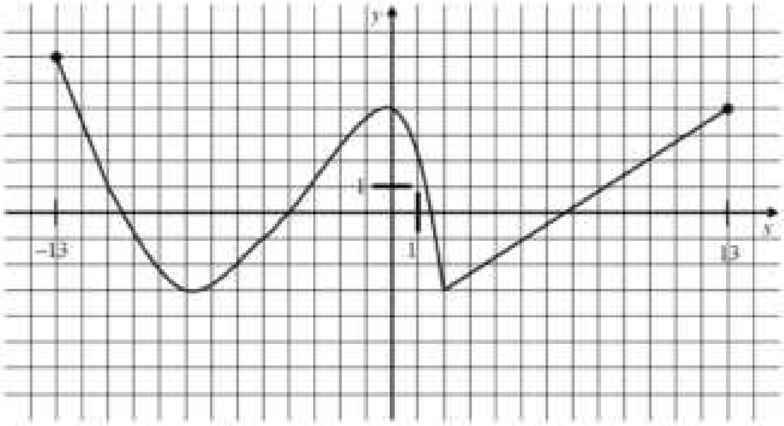
Maximuma van, (1 pont)

szélsőérték helye: **1**; (1 pont)

értéke: **4**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Adjon meg egy olyan zárt intervallumot, ahol a grafikonjával megadott alábbi függvény csökkenő! (2 pont)



__Megoldás:__

Például: $[0;2]$ **vagy** $[-13;-8]$ (2 pont)

12) Adott az $f: \mathbb{R}^- \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-x}$ függvény. Határozza meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyhez tartozó függvényérték 4. (2 pont)

__Megoldás:__

$x = -16$ (2 pont)

13) Adja meg a $[-2;3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2 + 1$ függvény értékkészletét! (3 pont)

__Megoldás:__

A függvény legkisebb értéke az 1, (1 pont)
az adott intervallum végpontjaiban a függvény értéke 5, illetve 10, (1 pont)
a függvény értékkészlete az $[1;10]$ intervallum. (1 pont)

Összesen: 3 pont

14) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett az $x \mapsto x^2 - 5x$ másodfokú függvény zérushelyeit! Számítsa ki a függvény helyettesítési értékét az 1,2 helyen! (3 pont)

__Megoldás:__

Zérushelyek: **0** és **5**. (2 pont)
A helyettesítési érték $\mathbf{-4{,}56}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

15) Mennyi az $f(x) = -|x| + 10$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény legnagyobb értéke, és hol veszi fel ezt az értéket? (2 pont)

__Megoldás:__

A legnagyobb érték: **10**. (1 pont)
Ezt az $x = 0$ helyen veszi fel. (1 pont)

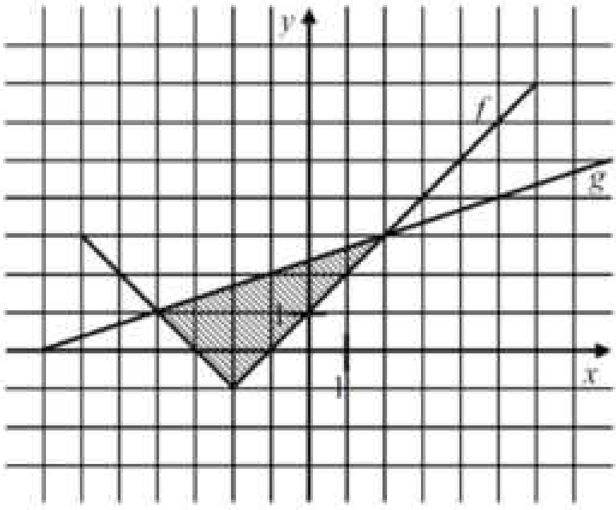
Összesen: 2 pont

16) a) Fogalmazza meg, hogy az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x+2| - 1$ függvény grafikonja milyen transzformációkkal származtatható az

$f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_0(x) = |x|$, függvény grafikonjából! Ábrázolja az f függvényt a $[-6;6]$ intervallumon! **(5 pont)**

b) Írja fel az $A(-4;1)$ és $B(5;4)$ pontokon áthaladó egyenes egyenletét! Mely pontokban metszi az AB egyenes az f függvény grafikonját? (Válaszát számítással indokolja!) **(7 pont)**

Megoldás:



a) Ha az $f_0 = |x|$ grafikonját előbb a $(-2;0)$, (1 pont)

majd a $(0;-1)$ vektorral eltoljuk, az f függvény grafikonját kapjuk. (1 pont)

Helyes grafikon. (3 pont)

b) Az AB egyenes egyenlete: $x - 3y = -7$ (3 pont)

Az egyik közös pont: $A(-4;1)$ (2 pont)

Az egyik közös pont: $B(2;3)$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

17) Adja meg a $3x + 2y = 18$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit! **(2 pont)**

Megoldás:

$(0;9)$ (2 pont)

18) A valós számok halmazán értelmezett f másodfokú függvény grafikonját úgy kaptuk, hogy a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonját a $v(2;-4,5)$ vektorral eltoltuk.

a) Adja meg az f függvény hozzárendelési utasítását képlettel! **(3 pont)**

b) Határozza meg f zérushelyeit! **(4 pont)**

c) Ábrázolja f grafikonját a $[-2; 6]$ intervallumon! **(4 pont)**

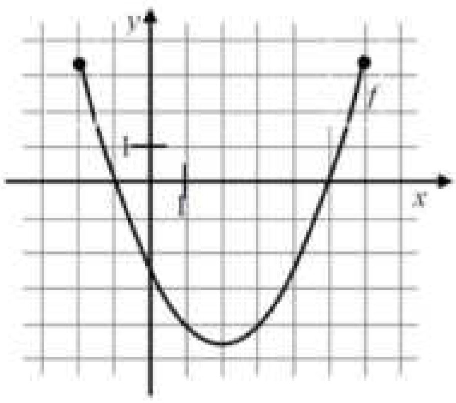
Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

d) $\frac{1}{2}x^2 \le 2x + \frac{5}{2}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A függvény hozzárendelési szabálya:

$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 4,5$ (3 pont)



b) A $0,5(x-2)^2 - 4,5 = 0$ egyenletet kell megoldani.

$0,5(x-2)^2 - 4,5 = 0$ (1 pont)

$x_1 = 5$ (1 pont)

$x_2 = -1$ (1 pont)

c) Ábra (4 pont)

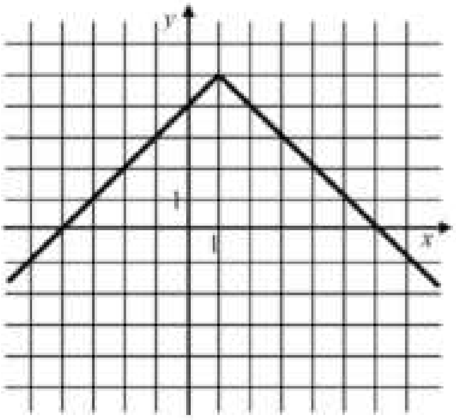
d) Átrendezve az egyenlőtlenséget, éppen az $f(x) \le 0$ alakhoz jutunk. (3 pont)

Ennek az egész megoldásai: $\mathbf{-1; 0; 1; 2; 3; 5}$. (3 pont)

A feladat megoldható grafikusan is.

Összesen: 17 pont

19) A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto |x|$ függvényt transzformáltuk. Az alábbi ábra az így kapott f függvény grafikonjának egy részletét mutatja. Adja meg f hozzárendelési utasítását képlettel! (3 pont)



Megoldás:

A hozzárendelési utasítás: $x \mapsto -|x-1|+5$ (3 pont)

A hozzárendelési utasítás megadható a függvény két részre bontásával is.

20) Legyen f a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$\boldsymbol{f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).}$$

Mennyi az f függvény helyettesítési értéke, ha $x = \frac{\pi}{3}$?

Írja le a számolás menetét! (3 pont)

Megoldás:

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ (1 pont)

$= 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$ (1 pont)

$= \mathbf{-1}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

21) Az $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto 3 + \log_2 x$ függvény az alább megadott függvények közül melyikkel azonos?

A: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto 3\log_2 x$

B: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \log_2(8x)$

C: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \log_2(3x)$

D: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \log_2(x^3)$ **(2 pont)**

Megoldás:

A helyes válasz betűjele: **B** (2 pont)

22) a) Rajzolja meg derékszögű koordinátarendszerben a $]-1;6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto -|x-2|+3$ hozzárendelésű függvény grafikonját! (4 pont)

a) Állapítsa meg a függvény értékkészletét, és adja meg az összes zérushelyét! **(3 pont)**

b) Döntse el, hogy a $P(3,2;1,58)$ pont rajta van-e a függvény grafikonján! Válaszát számítással indokolja! **(2 pont)**

c) Töltse ki az alábbi táblázatot, és adja meg a függvényértékek (a hét szám) mediánját! **(3 pont)**

Megoldás:

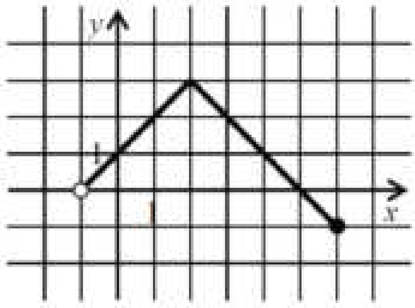
a) Ábra (4 pont)

b) Az értékkészlet az $[-1;3]$ intervallum, (2 pont)

a függvény zérushelye az $(\boldsymbol{x}=)\mathbf{5}$ (1 pont)

c) ***P* nincs a grafikonon**, (1 pont)

mert pl. $-|3,2-2|+3=1,8$ (1 pont)



d)

x	-0,5	0	1,7	2	2,02	4	5,5
$-\lvert x-2\rvert+3$	0,5	1	2,7	3	2,98	1	-0,5

(1 pont)

Sorba rendezés: –0,5; 0,5; 1; 1; 2,7; 2,98; 3. (1 pont)

A medián **1**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

23) Milyen valós számokat jelöl az a, ha tudjuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő? **(2 pont)**

Megoldás:

$\boldsymbol{a>1}$ (2 pont)

24) Adja meg képlettel egy olyan, a valós számok halmazán értelmezett függvény hozzárendelési utasítását, amelynek (abszolút) maximuma van! A megadott függvénynek állapítsa meg a maximumhelyét is! **(3 pont)**

Megoldás:

Például: $\boldsymbol{f}:\ \boldsymbol{x \mapsto -x^2-2x-1}$ (2 pont)

Abszolút maximuma van $\boldsymbol{x=-1}$ helyen. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) A következő két függvény mindegyikét a valós számok halmazán értelmezzük:

$\boldsymbol{f(x)=3\sin x;\ g(x)=\sin 3x}$.

Adja meg mindkét függvény értékkészletét! **(2 pont)**

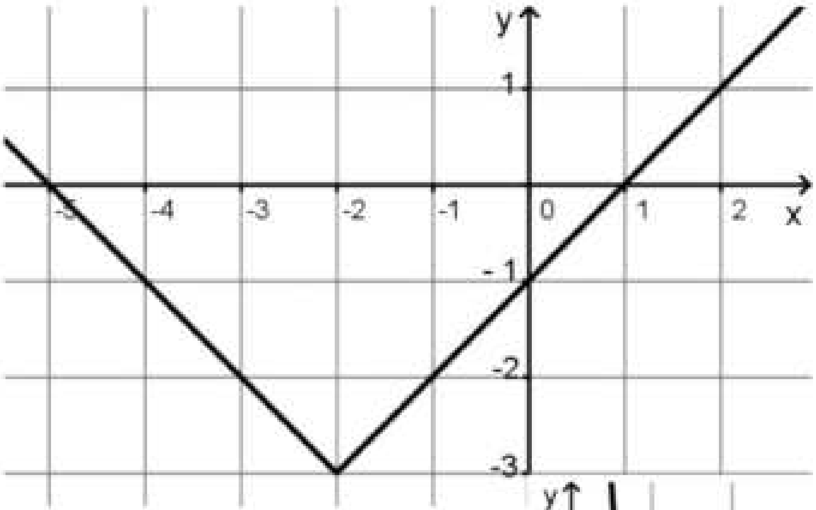
Megoldás:

f értékkészlete: $\boldsymbol{R_f=[-3;3]}$ (1 pont)

g értékkészlete: $\boldsymbol{R_g=[-1;1]}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

26) **Az ábrán a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=|x+a|+b$ függvény grafikonjának egy részlete látható. Adja meg a és b értékét!** **(2 pont)**



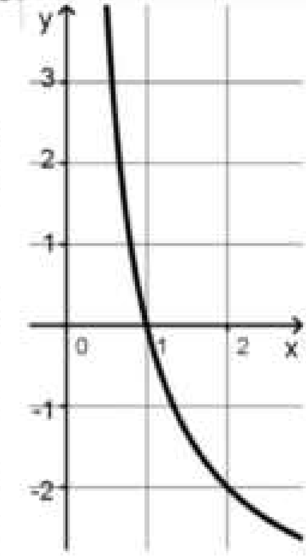
Megoldás:

$a=2$ (1 pont)
$b=-3$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

27) **István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x \ (x>0)$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).**
Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!

a) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.
b) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.
c) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1. **(2 pont)**



Megoldás:

b). (2 pont)

Összesen: 2 pont

28) **Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=(x+2)^2+4$ függvény. Adja meg az f függvény minimumának helyét és értékét!** **(2 pont)**

Megoldás:

A minimum helye: -2 (1 pont)
A minimum értéke: 4 (1 pont)

Összesen: (2 pont)

29) **Az alább felsorolt, a valós számok halmazán értelmezett függvényeket közös koordinátarendszerben ábrázoljuk. A három függvény közül kettőnek a grafikonja megegyezik, a harmadik eltér tőlük. Melyik függvény grafikonja tér el a másik két függvény grafikonjától?** **(2 pont)**

a) $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x)$

b) $x \mapsto \sin x$

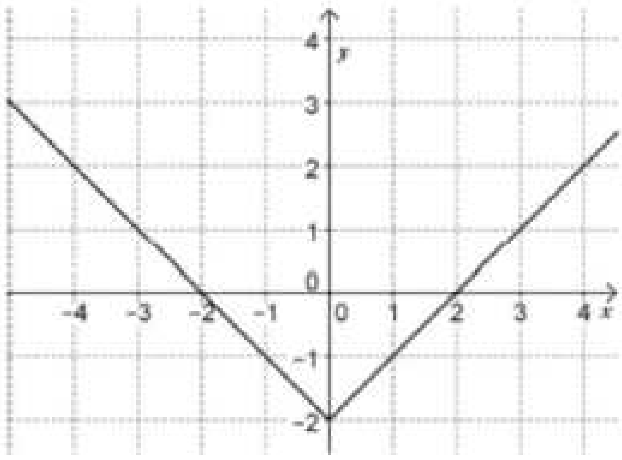
c) $x \mapsto \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

Megoldás:

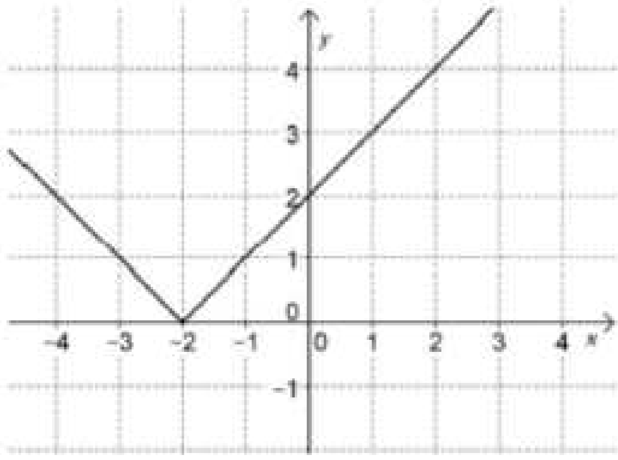
A helyes válasz betűjele: **a)** (2 pont)

30) Az alábbi hozzárendelési utasítással megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvények közül kettőnek egy-egy részletét ábrázoltuk. Adja meg a grafikonokhoz tartozó hozzárendelési utasítások betűjelét!

(2 pont)



1)



2)

A) $x \mapsto |x+2|$ B) $x \mapsto |x-2|$ C) $x \mapsto |x|-2$ D) $x \mapsto |x|+2$

Megoldás:

1) párja **C)** (1 pont)

2) párja **A)** (1 pont)

Összesen: 2 pont

31) Adja meg az $x \to x^2+10x+21\ (x \in \mathbb{R})$ másodfokú függvény minimumhelyét és minimumának értékét! Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

$x^2+10x+21=(x+5)^2-4$ (2 pont)

A minimumhely $\mathbf{-5}$. (1 pont)

A minimum értéke $\mathbf{-4}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

32) Legyenek f és g a valós számok halmazán értelmezett függvények, továbbá: $f(x)=5x+5,25$ és $g(x)=x^2+2x+3,5$

a) Számítsa ki az alábbi táblázatok hiányzó értékeit! (3 pont)

x	3	x	
$f(x)$		$g(x)$	2,5

b) Adja meg a g függvény értékkészletét! (3 pont)

c) Oldja meg az $5x+5,25>x^2+2x+3,5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (6 pont)

Megoldás:

a) $\boldsymbol{f(3)=20,25}$ (1 pont)

$x^2+2x+3,5=2,5$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=-1}$ (1 pont)

b) A függvény hozzárendelési utasítását átalakítva: $x^2+2x+3,5=(x+1)^2+2,5$

(1 pont)

A függvény minimuma a 2,5. (1 pont)

Az értékkészlet: $[\mathbf{2,5};\infty[$ (1 pont)

c) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 12. feladat*

Összesen: 12 pont

33) Adja meg az alábbi hozzárendelési szabályokkal megadott, a valós számok halmazán értelmezett függvények értékkészletét!

$$\boldsymbol{f(x) = 2\sin x}$$

$$\boldsymbol{g(x) = \cos 2x}$$ **(2 pont)**

Megoldás:

f értékkészlete: $[\mathbf{-2};\mathbf{2}]$ (1 pont)

g értékkészlete: $[\mathbf{-1};\mathbf{1}]$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

34) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) A valós számok halmazán értelmezett $\boldsymbol{f(x) = 4}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az $\boldsymbol{x}$ tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)

b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)

c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm²-ben mért számértéke. (1 pont)

d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)

b) **hamis** (1 pont)

c) **igaz** (1 pont)

d) **hamis** (1 pont)

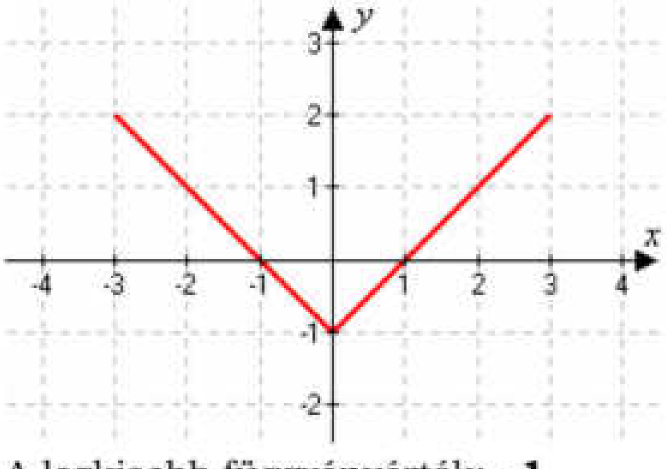
Összesen: 4 pont

35)

a) Rajzolja fel a $[-3;3]$ intervallumon értelmezett $\boldsymbol{x \mapsto |x| - 1}$ függvény grafikonját! (2 pont)

b) Mennyi a legkisebb függvényérték? (1 pont)

Megoldás:



a) (2 pont)

b) A legkisebb függvényérték: $\mathbf{-1}$. (1 pont)

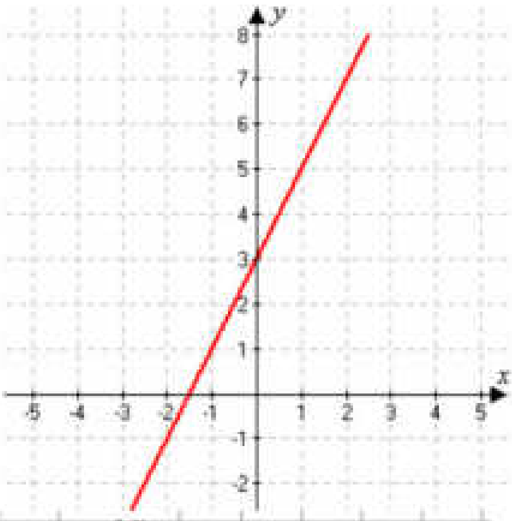
36) Melyik az ábrán látható egyenes egyenlete az alábbiak közül? (2 pont)

A: $y = 2x + 3$

B: $y = -2x + 3$

C: $y = 2x - 1,5$

D: $y = 2x - 3$



Megoldás:

A helyes válasz betűjele: **A.** (2 pont)

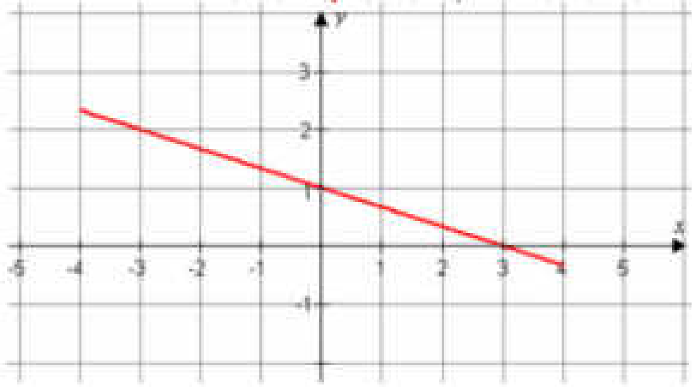
37) Az ábrán egy $[-4;4]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki, hogy melyik formula adja meg helyesen a függvény hozzárendelési szabályát!

a) $x \mapsto \frac{1}{3}x + 1$

b) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 1$

c) $x \mapsto -3x + 1$

d) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 3$



Megoldás:

b) $x \mapsto -\frac{1}{3}x + 1$ (2 pont)

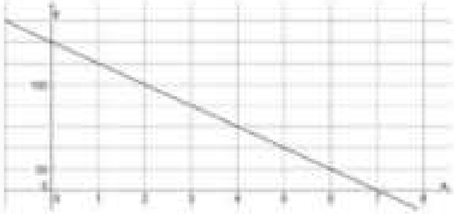
Összesen: 2 pont

38) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x - 4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x) = 6$? (2 pont)

Megoldás:

$x_1 = -2$, $x_2 = 10$ (2 pont)

39) Az ábrán az $x \mapsto m \cdot x + b$ lineáris függvény grafikonjának egy részlete látható. Határozza meg m és b értékét! (3 pont)



Megoldás:

$b = 140$)

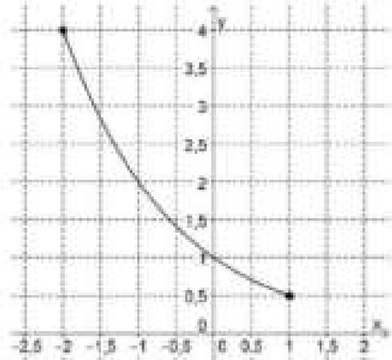
$m = -20$)

Összesen: 3 pont

40) Az ábrán az $f : [-2;1] \Rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = a^x$ függvény grafikonja látható.

a) Adja meg az f függvény értékkészletét! (1 pont)

b) Határozza meg az a szám értékét! (2 pont)



Megoldás:

Az f értékkészlete $[0,5;4]$. (1 pont)

$a = 0,5$. (2 pont)

41) **Válassza ki az f függvény hozzárendelési szabályát az A, B, C, D lehetőségek közül úgy, hogy az megfeleljen az alábbi értéktáblázatnak! (2 pont)**

x	-2	0	2
$f(x)$	-4	0	-4

A: $f(x)=2x$ **B:** $f(x)=x^2$ **C:** $f(x)=-2x$ **D:** $f(x)=-x^2$

Megoldás:

D (2 pont)

Összesen: 2 pont

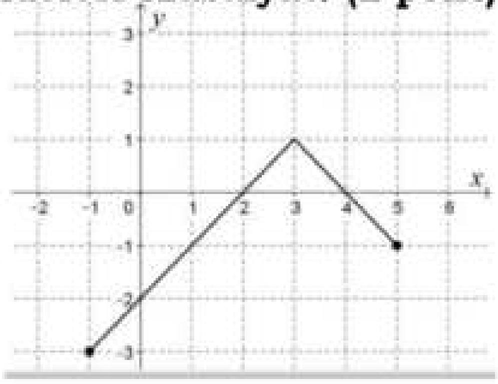
42) **Az ábrán a $[-1;5]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)**

A: $x\mapsto |x-3|+1$

B: $x\mapsto -|x+3|+1$

C: $x\mapsto -|x-3|+1$

D: $x\mapsto -|x+3|-1$



Megoldás:

C (2 pont)

43)

a) **Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)**

b) **Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!**

$$\cos^2 x=\frac{1}{4}\ (x\in\mathbb{R}).$$ **(6 pont)**

c) **Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)**

I) **Az $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, f(x)=\sin x$ függvény páratlan függvény.**

II) **Az $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}, g(x)=\cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.**

III) **A $h:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, $h(x)=\cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.**

Megoldás:

a) *Lásd: Síkgeometria 38. feladat*

b) *Lásd: Trigonometria 17. feladat*

c)

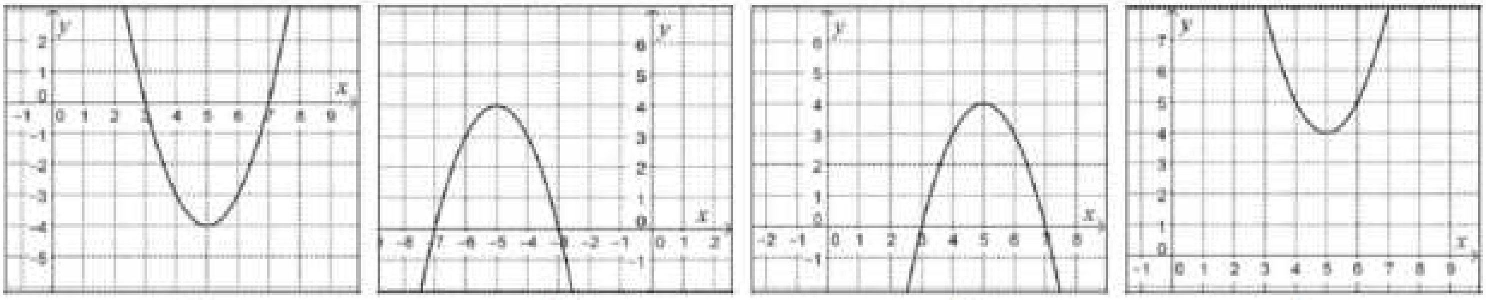
I) **igaz**

II) **hamis**

III) **hamis** (2 pont)

Összesen: 12 pont

44) **Adott a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto -(x-5)^2+4$ függvény. Melyik ábrán látható e függvény grafikonjának egy részlete?** **(2 pont)**



A B C D

Megoldás:

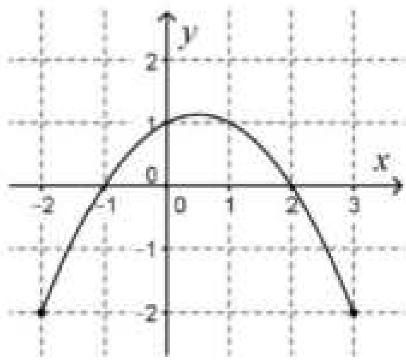
A helyes válasz: **C** (2 pont)

45) **Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \to 1+\cos x$ függvény értékkészletét!** **(2 pont)**

Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[0;2]$ (2 pont)

46) **Az ábrán látható függvény értelmezési tartománya a $[-2;3]$ intervallum, két zérushelye a -1 és 2. Az értelmezési tartományának mely részhalmazán vesz fel a függvény pozitív értéket?** **(2 pont)**



Megoldás:

A kérdéses intervallum: $]-1;2[$ (2 pont)

47) **Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto (x-2)^2$ függvény minimumának helyét és értékét!** **(2 pont)**

Megoldás:

A minimum helye: **2**. (1 pont)
A minimum értéke: **0**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

48)

a) **Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:**
$|x-3| = 3x-1$. **(7 pont)**

Az $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = a \cdot x + b$ lineáris függvény zérushelye -4. Tudjuk továbbá, hogy az $x = 4$ helyen a függvényérték 6.

b) **Adja meg a és b értékét!** **(6 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 14. feladat*

b) A megadott feltételek szerint $a \cdot (-4) + b = 0$, (2 pont)

továbbá $a \cdot 4 + b = 6$. (1 pont)

Az egyik egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve és a másik egyenletbe helyettesítve vagy a két egyenletet összeadva kapjuk, hogy (1 pont)

$b = 3$, (1 pont)

$a = 0,75$. (1 pont)

Összesen: 13 pont

49) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 1 + \sin x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

***Megoldás*:**

Felírjuk a $\sin x$ függvény értékkészletét.

$-1 \le \sin x \le 1$

Ha az így kapott egyenlőtlenség minden oldalához hozzáadunk egyet, megkapjuk az $1 + \sin x$ függvény értékkészletét.

$0 \le 1 + \sin x \le 2$ (2 pont)

Tehát a megoldás $[0;2]$.

Összesen: 2 pont

50) Az alábbi függvények a pozitív számok halmazán értelmezettek:

$f(x) = -5x$

$g(x) = 5\sqrt{x}$

$h(x) = \dfrac{5}{x}$

$i(x) = 5 - x$

Adja meg annak a függvénynek a betűjelét, amelyik fordított arányosságot ír le! (2 pont)

***Megoldás*:**

Egy függvény akkor ír le fordított arányosságot, ha x és y értékek szorzata állandó, így a $h(x)$ függvény a megoldás. (2 pont)

Összesen: 2 pont

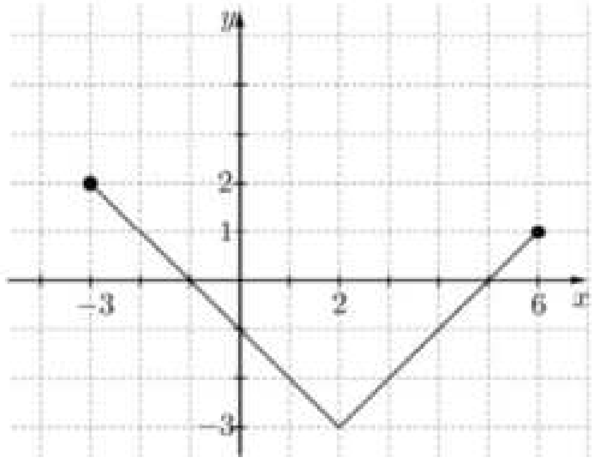
51) Ábrázolja a $[-3;6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto |x-2|-3$ függvényt! (4 pont)

***Megoldás*:**

A függvény grafikonja az abszolútérték függvény grafikonjából származik. (1 pont)

Az abszolút értéken belüli $|x-2|$ miatt vízszintesen pozitív irányba, az abszolút értéken kívüli $|x-2|-3$ miatt pedig függőlegesen negatív irányba toljuk az eredeti függvényt. (2 pont)

Végül a függvényt a megadott intervallumra szűkítjük. (1 pont)



52)

a) **Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$, súlypontja az origó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit!** **(3 pont)**

b) **Írja fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely -3-hoz -1-et és 3-hoz 7-et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x \mapsto ax+b$ alakban adja meg!)** **(5 pont)**

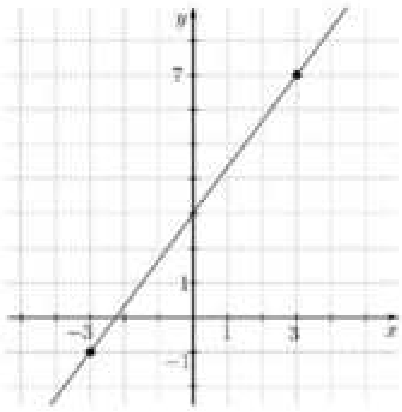
c) **Adott az $A(-3;-1)$ és a $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz!** **(9 pont)**

***Megoldás*:**

a) *Lásd: Koordinátageometria 37. feladat*

b) A függvény képe egy egyenes, meredeksége $m=\frac{7-(-1)}{3-(-3)}=\frac{4}{3}$. (2 pont)

A $(3;7)$ ponton átmenő $\frac{4}{3}$ meredekségű egyenes egyenlete pedig $y-7=\frac{4}{3}(x-3)$, így a hozzárendelés szabálya $\boldsymbol{x \mapsto \frac{4}{3}x+3}$. (3 pont)



c) *Lásd: Koordinátageometria 37. feladat*

Összesen: 17 pont

53) **Az alábbi hozzárendelési utasítások közül adja meg annak a betűjelét, amely a 0-hoz 4-et, a 2-höz pedig 0-t rendel!**

A : $x \mapsto 2x+4$ B : $x \mapsto 2x-4$ C : $x \mapsto -2x+4$ D : $x \mapsto -2x-4$

(2 pont)

Megoldás:

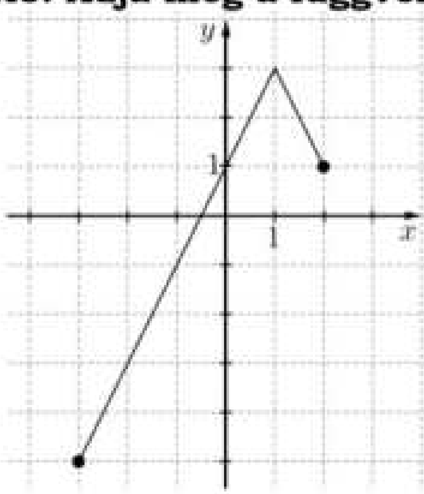
$f(0)=-2\cdot(0)+4=4$

$f(2)=-2\cdot(2)+4=0$

$\Rightarrow$ tehát a megoldás a **C : $x \mapsto -2x+4$** (2 pont)

Összesen: 2 pont

54) **Az alábbi ábrán a $[-3;2]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto -2|x-1|+3$ függvény grafikonja látható. Adja meg a függvény értékkészletét!** **(2 pont)**



Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[-5;3]$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

55) Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény: $f: x \mapsto (x-1)^2 - 4$.

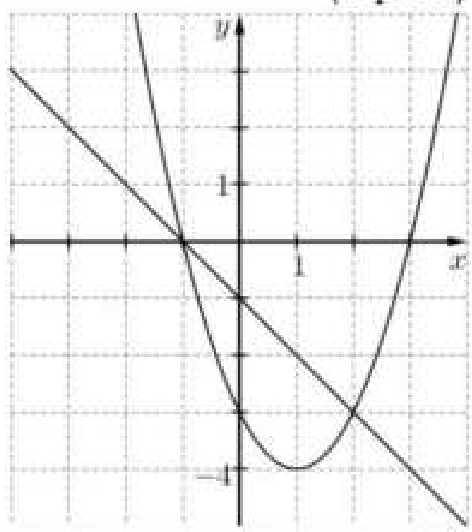
a) Számítsa ki az f függvény $x = -5$ helyen felvett helyettesítési értékét! (2 pont)

b) Ábrázolja az f függvényt, és adja meg szélsőértékének helyét és értékét! (5 pont)

c) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $(x-1)^2 - 4 = x - 1$. (5 pont)

Megoldás:

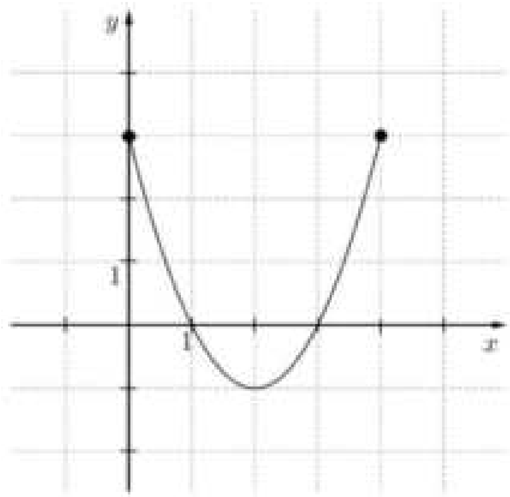
a) $f(-5) = (-5-1)^2 - 4 = \mathbf{32}$ (2 pont)



b) Az ábrázolt függvény grafikonja az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonjából eltolással származik (1 pont)
tengelypontjának első koordinátája 1, (1 pont)
második koordinátája -4. (1 pont)
A függvénynek az $x = 1$ helyen van szélsőértéke (minimuma), (1 pont)
melynek értéke -4. (1 pont)

c) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 36. feladat*

56) Az ábrán egy, a $[0;4]$ zárt intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Válassza ki a felsoroltak közül a függvény hozzárendelési szabályát!



A: $x \mapsto (x-2)^2 + 1$ **B:** $x \mapsto (x-2)^2 - 1$ **C:** $x \mapsto (x+2)^2 + 1$ **D:** $x \mapsto (x+2)^2 - 1$

(2 pont)

Megoldás:

B: $\boldsymbol{x \mapsto (x-2)^2-1}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

57) Egy számtani sorozat negyedik tagja 4, tizenhatodik tagja –2.

a) Számítsa ki a sorozat első 120 tagjának az összegét! (5 pont)

b) Adott egy szakasz két végpontja: $A(0;4)$ és $B(2;3)$. Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét! (5 pont)

c) Egy elsőfokú függvény a 0-hoz 4-et, a 2-höz 3-at rendel. Írja fel a függvény hozzárendelési szabályát! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 48. feladat*

b) *Lásd: Koordinátageometria 40. feladat*

c) A hozzárendelési szabály legyen $x \mapsto mx+b$. (1 pont)

A függvény grafikonja egyenes, melynek meredeksége: $\left(\frac{3-4}{2-0}=\right)-0{,}5$ (2 pont)

A függvény az y tengelyt 4-nél metszi, így a hozzárendelési szabály: $\boldsymbol{x \mapsto -0{,}5x+4}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

58) Hol metszi a koordinátatengelyeket az $x \mapsto -2x+6\ (x \in R)$ függvény grafikonja? (2 pont)

Megoldás:

A függvény általános alakja $y = mx+b$, és az x tengelyt ott metszi, ahol a második koordináta 0, azaz az $-2x+6=0$ egyenletet kell megoldanunk, ahonnan $x=3$. Az x tengelyt tehát a $\mathbf{(3;0)}$ pontban metszi a függvény. (1 pont)

Az y tengelyt ott metszi a függvény, ahol az első koordináta 0, azaz az $y=-2\cdot 0+6$ egyenletet kell megoldanunk, ahonnan $y=6$. Az y tengelyt tehát a $\mathbf{(0;6)}$ pontban metszi a függvény. (1 pont)

Összesen: 2 pont

59)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x}{x+2}=\frac{8}{(x+2)(x-2)}$$ **(6 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\frac{x}{x+2}<0$$ **(4 pont)**

c) Határozza meg a valós számokon értelmezett $f(x)=x^2-6x+5$ függvény minimumának helyét és értékét! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 38. feladat*

b) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 38. feladat*

c) Teljes négyzetté alakítás: $f(x)=(x-3)^2-4$ (2 pont)

Innen leolvasható a parabola minimumának helye és értéke, tehát $\boldsymbol{x = 3}$ és $\boldsymbol{y = -4}$. (2 pont)

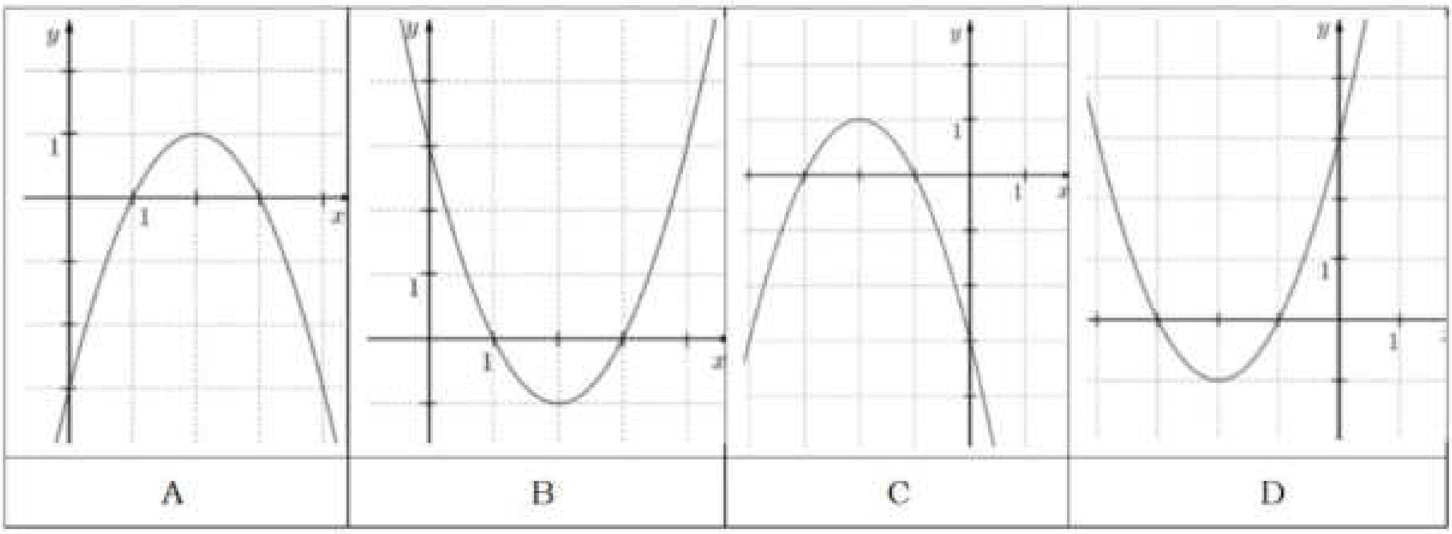
Összesen: 14 pont

60) Adott az $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$ függvény.

a) Írja fel két elsőfokú tényező szorzataként az $x^2 + 4x + 3$ kifejezést! **(2 pont)**

b) A $P(-6{,}5; y)$ pont illeszkedik az f grafikonjára. Számítsa ki y értékét! **(2 pont)**

c) Az alábbi grafikonok közül válassza ki az f függvény grafikonját (karikázza be a megfelelő betűt), és határozza meg az f értékkészletét! **(3 pont)**



Adott a $g : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 6x + 5$ függvény. Az a három pont, ahol a g grafikonja metszi a koordinátatengelyeket, egy háromszöget határoz meg.

d) Határozza meg ennek a háromszögnek a területét! **(7 pont)**

Megoldás:

a) $x^2 + x + 3x + 3 = x(x+1) + 3(x+1) = \boldsymbol{(x+1)(x+3)}$ (2 pont)

b) *Lásd: Koordinátageometria 43. feladat*

c) Mivel x^2 együtthatója pozitív, az f függvény grafikonja konvex lesz. A kifejezést teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy $x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$. Ebből tudjuk, hogy a függvény grafikonja az x tengelyt-2-nél, az y tengelyt pedig -1-nél fogja metszeni. Ezért az f függvény grafikonja a **D**. (1 pont)
A függvény minimumértéke a -1-nél van, felülről pedig nem korlátos, így az f függvény értékkészlete: $\mathbf{R} : \boldsymbol{y \in [-1; \infty[}$. (2 pont)

d) *Lásd: Koordinátageometria 43. feladat*

Összesen: 14 pont

61) Válassza ki az alább felsorolt, a valós számok halmazán értelmezett függvények közül a páros függvényeket!

A) $a(x) = 3x^2$ B) $b(x) = x^3$ C) $c(x) = |x|$ D) $d(x) = 4x + 2$ **(2 pont)**

Megoldás:

Páros függvény az, amelyre igaz, hogy $f(x) = f(-x)$.

$3x^2 = 3(-x)^2$ $\quad x^3 \neq (-x)^3$ $\quad |x| = |-x|$ $\quad 4x+2 \neq 4(-x)+2$

Tehát páros függvény az **A)** és a **C)**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

62) Adott a $[-2;4]$ zárt intervallumon értelmezett *f* függvény: $x \mapsto -\frac{1}{2}x+4$.

a) Mit rendel az *f* függvény az $x=-\frac{3}{4}$ számhoz? (2 pont)

b) Ábrázolja az *f* grafikonját! Adja meg az *f* értékkészletét! (5 pont)

Adott a valós számok halmazán értelmezett *g* függvény: $x \mapsto x^2-4x+3$.

c) Hány olyan szám van, amelyhez a *g* függvény a $\left(-\frac{3}{4}\right)$ értéket rendeli? (4 pont)

Megoldás:

a) $f\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+4=\frac{3}{8}+4=\mathbf{4{,}375}$ (2 pont)

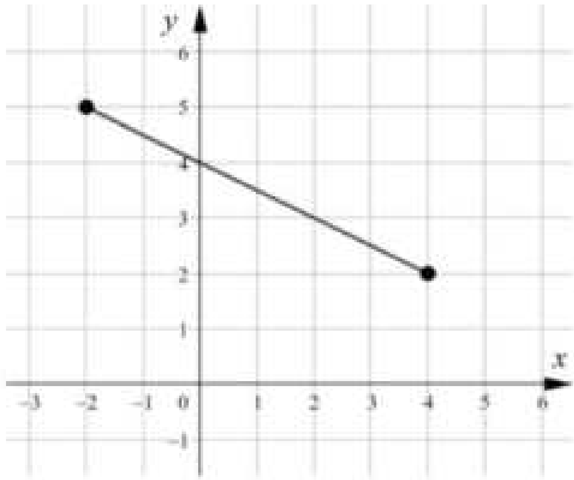
b) A függvény:

- meredeksége $-\frac{1}{2}$

- 4-nél metszi az y tengelyt

- a $[-2;4]$ van értelmezve

A legkisebb érték, amit a függvény felvesz 2, a legnagyobb pedig 5, így az értékkészlet $\boldsymbol{R: y \in [2;5]}$.



c) A megoldandó egyenlet:

$x^2-4x+3=-\frac{3}{4} \Rightarrow x^2-4x+3{,}75=0$. (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $x_1=1{,}5$ és $x_2=2{,}5$. (2 pont)

Tehát **két** olyan szám van, amihez a g függvény a $\left(-\frac{3}{4}\right)$ értéket rendeli. (1 pont)

Összesen: 11 pont

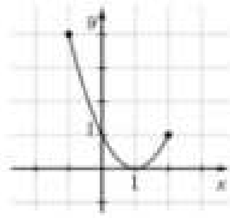
63) Ábrázolja a $[-1;\ 2]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto (x-1)^2$ függvényt! (3 pont)

Megoldás:

A megrajzolt grafikon egy felfelé nyíló normálparabola íve.

A parabola tengelypontja $(1;\ 0)$. (1 pont)

A függvény a megfelelő intervallumon van ábrázolva. (2 pont)



Összesen: 3 pont

64)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=2$$ **(6 pont)**

Legyenek *f*, *g* és *h* függvények a valós számok halmazán értelmezve úgy, hogy

$f(x)=x-1,$

$g(x)=2^x,$

$h(x)=|x|-3.$

b) Adja meg annak a függvények a betűjelét, amely a (-2)-höz (-1)-et rendel! **(2 pont)**

c) Töltse ki az alábbi táblázatot az „igaz" és „hamis" szavakkal annak megfelelően, hogy az adott kijelentés igaz vagy hamis az adott függvény esetén! **(5 pont)**

	van zérushelye	**monoton növekvő a teljes értelmezési tartományon**	**van minimuma**
f			
g			
h			

Megoldás:

a) Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 46. feladat

b) A függvényekbe való behelyettesítéssel a megfelelő függvény a ***h***. (2 pont)

c) 9 helyes válasz esetén. (5 pont)
8 helyes válasz esetén. (4 pont)
7 helyes válasz esetén. (3 pont)
6 helyes válasz esetén. (2 pont)
5 helyes válasz esetén. (1 pont)

	van zérushelye	monoton növekvő a teljes ért. tartományon	van minimuma
f	igaz	igaz	hamis
g	hamis	igaz	hamis
h	igaz	hamis	igaz

Összesen: 13 pont

65) Adott a valós számok halmazán értelmezett *f* függvény: $f(x)=10^{\frac{x}{4}}$. Határozza meg $f(12)$ értékét és adja meg azt az *x* valós számot, amelyre $f(x)=100$. **(3 pont)**

Megoldás:

$f(12)=1000$ (1 pont)

A megoldandó egyenlet: $10^{\frac{x}{4}}=100$ melyből megkapjuk, hogy $x=8$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

66) Egy klímakutató a globális éves középhőmérséklet alakulását vizsgálja. Rendelkezésére állnak a Föld évenkénti középhőmérsékleti adatai 1900-tól kezdve. A kutató az adatok alapján az alábbi függvénnyel modellezi az éves középhőmérséklet alakulását: $f(x) = 0,0001x^2 - 0,0063x + 15,2$.

A képletben x az 1900 óta eltelt évek számát, $f(x)$ pedig az adott év középhőmérsékletét jelöli Celsius-fokban $(0 \leq x \leq 119)$.

a) Számítsa ki, hogy a modell szerint 2018-ban hány fokkal volt magasabb az éves középhőmérséklet, mint 1998-ban! (4 pont)

b) Melyik évben volt az éves középhőmérséklet $15,42$ °C? (5 pont)

A kutató (a kétezer óta mért adatok alapján tett) egyik feltételezése szerint 2018 utáni néhány évtizedben a globális éves középhőmérséklet alakulását a következő függvénnyel lehet előre jelezni: $g(t) = 15,92 \cdot 1,002^t$. Ebben a képletben t a 2018 óta eltelt évek számát, $g(t)$ pedig az adott év becsült középhőmérsékletét jelöli Celsius-fokban $(0 \leq t)$.

c) Ezt a modellt alkalmazva számítsa ki, hogy melyik évben lesz az éves középhőmérséklet $16,7$ °C! (5 pont)

Megoldás:

a) Az 1998-as adat kiszámításához $x = 98$, a 2018-as adathoz $x = 118$. (1 pont)

$f(98) = 0,0001 \cdot 98^2 - 0,0063 \cdot 98 + 15,2 = 15,543$ (1 pont)

$f(118) = 0,0001 \cdot 118^2 - 0,0063 \cdot 118 + 15,2 = 15,849$ (1 pont)

2018-ban $15,849 - 15,543 \approx 0,3$ Celsius-fokkal volt magasabb az éves középhőmérséklet, mint 1998-ban. (1 pont)

b) Megoldandó a $0,0001x^2 - 0,0063x + 15,2 = 15,42$ egyenlet, ahol $0 \leq x \leq 119$ (1 pont)

Rendezve $0,0001x^2 - 0,0063x - 0,22 = 0$. (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $x_1 = -25$ és $x_2 = 88$. (1 pont)

A 88 megoldása a feladatnak, azonban a -25 nem. (1 pont)

Tehát 1988-ban volt az éves középhőmérséklet $15,42$ °C. (1 pont)

c) Megoldandó a $15,92 \cdot 1,002^t = 16,7$ egyenlet, ahol $0 \leq t$. (1 pont)

Rendezve: $1,002^t \approx 1,049$ (1 pont)

$t \approx \log_{1,002} 1,049 = \dfrac{\lg 1,049}{\lg 1,002} \approx 23,94$ (2 pont)

Tehát 2042-ben lesz a modell alapján az éves középhőmérséklet $16,7$ °C (1 pont)

Összesen: 14 pont

67) Adott a $[-2; 2]$ zárt intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2 - 1$ függvény. Határozza meg a függvény értékkészletét és zérushelyeit! (4 pont)

Megoldás:

A függvény értékkészlete: $\mathbf{[-1; 3]}$. (2 pont)

A függvény zérushelyei: $\mathbf{x_1 = -1}$ és $\mathbf{x_2 = 1}$. (2 pont)

Összesen: 4 pont

68) A derékszögű koordinátarendszerben ábrázoltuk a valós számok halmazán értelmezett $f: x \mapsto \frac{2}{5}x + \frac{8}{5}$ függvényt. Adjon meg egy olyan pontot a koordinátáival, amely illeszkedik a függvény grafikonjára!
(2 pont)

Megoldás:

Egy tetszőlegesen választott x-et behelyettesítve a $\frac{2}{5}x + \frac{8}{5}$ kifejezésbe megkapjuk egy olyan pontnak a koordinátáit, amely illeszkedik a függvény grafikonjára. (1 pont)

Például az $x = 1$ helyen a függvény értéke $\frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{8}{5} = 2$, tehát a $\boldsymbol{P(1;2)}$ egy lehetséges megoldás. (1 pont)

Összesen: 2 pont

69) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi)$ függvény helyettesítési értékét, ha $x = \frac{\pi}{2}$! **(2 pont)**

Megoldás:

Behelyettesítés után: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 2 \cdot \sin\frac{3\pi}{2} = 2 \cdot (-1) = \mathbf{-2}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

70) a) Az $x \mapsto mx + b$ lineáris függvény 1-hez 200-at, 21-hez pedig 5200-at rendel. Adja meg m és b értékét! **(5 pont)**

Anna szeretne részt venni a Balaton-átúszáson, amelyhez két különböző 21 napos edzéstervet készít. Azt már elhatározta, hogy az első napon 200 métert, az utolsó, 21. napon pedig az átúszás teljes távját, 5200 métert úszik. Az egyik edzéstervben a napi úszásmennyiségek egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a másik változatban pedig (jó közelítéssel) egy mértani sorozaté.

b) A teljes felkészülés alatt összesen hány métert úszna Anna az egyik, illetve a másik változatban? **(8 pont)**

A 2020-as Balaton-átúszáson az indulók 36%-a volt nő, átlagéletkoruk 35 év. Az indulók 64%-a volt férfi, átlagéletkoruk 38 év.

c) Mennyi volt ebben az évben az összes induló átlagéletkora? **(4 pont)**

Megoldás:

a) A feladat szövege alapján megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} m + b &= 200 \\ 21m + b &= 5200 \end{aligned}\right\}.$$ (2 pont)

A második egyenletből az elsőt kivonva: $20m = 5000$. (1 pont)

Az egyenletrendszer megoldása: $m = 250$ és $b = -50$. (1 pont)

Tehát a hozzárendelési szabály: $\boldsymbol{x \mapsto 250x - 50}$. (1 pont)

Alternatív megoldás:

A kérdéses lineáris függvény grafikonjának meredekségére:

$m = \frac{5200 - 200}{21 - 1} = 250$. (2 pont)

Behelyettesítve: $200 = 250 + b$. (1 pont)
Ebből $b = -50$. (1 pont)
Tehát a hozzárendelési szabály: $\boldsymbol{x \mapsto 250x - 50}$. (1 pont)

b) *Lásd: Sorozatok 61. feladat*

c) *Lásd: Statisztika 61 feladat*

Összesen: 17 pont

71) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = (x-3)^2 - 1$ függvény. Adja meg az *f* minimumának helyét és értékét! (2 pont)

Megoldás:

A vízszintes eltolás mértékét a zárójelen belüli szám ellentettje mutatja meg. Így a függvény minimumának helye: **3**. (1 pont)

A függőleges eltolás mértékét a zárójelen kívüli szám mutatja meg. Így a függvény minimumának értéke: $\mathbf{-1}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont